

TS PRODUCTIONS
PRÉSENTE



FESTIVAL DE CANNES
SÉLECTION OFFICIELLE

ELLA
RUMPF

JEAN-PIERRE
DARROUSSIN

CLOTILDE
COURAU

JULIEN
FRISON
DE LA COMÉDIE FRANÇAISE

LE THÉORÈME DE MARGUERITE



UN FILM DE
ANNA NOVION

AVEC SONIA BONNY MAURICE CHENG IDIR AZOUGLI CAMILLE DE SABLET

SCÉNARIO ANNA NOVION MATHIEU ROBIN MARIE-STÉPHANE IMBERT ET AGNÈS FEVRE ADAPTATION ET RÉALISATION MATHIEU ROBIN ET ANNA NOVION PRODUIT PAR MILÈNA PAVLO ET GILLES SACOTO COPRODUIT PAR ALINE SCHMID ET ADRIAN BLASER IMAGE JACQUES GIRAULT MONTAGE ANNE SOURIAU
MONTAGE SONORE PASCAL BIDEAU RÉGIEURS ANNE-SOPHIE BELSERIES CASTING BRIGITTE MAUDOU-ARNA FRANÇOIS GUIGNARD-ARNA SON MARC VON STÜPLER BEATRICE WICK ROMAN DYMNY DIRECTION DE PRODUCTION SOPHIE LUXON PRODUCTRICE ASSOCIÉE CONSTANCE PENCHENAT
1^{ER} ASSISTANT RÉALISATEUR FRANK MORANO SCÉNARISTE ALEXIA CHASSOT CONSULTANT MATHÉMATIQUES ARIANE MÉZARD COSTUMEUR CLARA BENE MANIPULATRICE MARIE ROETHELUX DÉCORS SCÉNARIQUE ROMAIN VIVACHE DIRECTION DE POST PRODUCTION DELPHINE PASSANT IMAGE PRODUCTION TS PRODUCTIONS CO-PRODUCTION FRANCE-SUISSE
AVEC FINANCEZ CINÉMA RTS RADIO TÉLÉVISION SUISSE ET BEAUVILLE FILMS AVEC LA PARTICIPATION DE CMC - FRANCE TÉLÉVISIONS AVEC LE SOUTIEN DE CANAL+ LA RÉGION ÎLE-DE-FRANCE DU PROGRAMME EUROPÉEN ET DE LA PRODUCEP ANGOA AVEC LE SOUTIEN DE L'OFFICE FÉDÉRAL DE LA CULTURE (DFK) DU FFROHM À L'OTRIE ROMANUE



DOSSIER PÉDAGOGIQUE

LE THÉORÈME DE MARGUERITE



Un film de ANNA **NOVION**

Durée : 1 h 52

Avec

ELLA **RUMPF**, JEAN-PIERRE **DARROUSSIN**, CLOTILDE **COURAU**,
JULIEN **FRISON** de la Comédie Française, SONIA **BONNY**

L'avenir de Marguerite, brillante élève en Mathématiques à l'ENS, semble tout tracé. Seule fille de sa promo, elle termine une thèse qu'elle doit exposer devant un parterre de chercheurs. Le jour J, une erreur bouscule toutes ses certitudes et l'édifice s'effondre. Marguerite décide de tout quitter pour tout recommencer.

AU CINÉMA LE 1^{er} NOVEMBRE

SOMMAIRE

Questions à la cinéaste Anna Novion	p. 3
Le point de vue d'Ariane Mézard	p. 5
Ce que <i>Le Théorème de Marguerite</i> nous dit des maths	p. 6
Quelques mathématiciennes	p. 9
Possibilités d'exploitation pédagogiques	p. 12
Proposition d'activité 1 : La Conjecture de Goldbach et les nombres premiers	p. 14
Proposition d'activité 2 : Poker, Mah-Jong et combinatoire	p. 17



QUESTIONS À LA CINÉASTE

ANNA NOVION

Pourquoi avoir situé votre film à l'École Normale Supérieure et dans l'univers des mathématiques ?

L'univers des mathématiques - et par extension de l'ENS - a rarement été représenté au cinéma, et encore moins avec une héroïne mathématicienne. C'est ma rencontre avec Ariane Mézard, l'une des rares et grandes mathématiciennes françaises, qui a été déterminante. C'est la première qui m'a parlé des mathématiques d'une manière artistique, en évoquant la poésie, l'imaginaire, tout ce qui m'anime aussi dans mon métier. En me parlant de sa passion, elle me parlait de la mienne. Gilles Deleuze disait très justement qu'un scientifique invente et crée autant qu'un artiste... Avec Mathieu Robin, mon co-scénariste, nous avons écrit un personnage qui s'inspirait très fortement d'Ariane et qui, en même temps, me racontait. Etre réalisatrice, c'est ne jamais rien lâcher. Il y a chez Marguerite ce volontarisme, une forme d'abnégation, une passion dans lesquels je me reconnais. L'autre point commun, c'est l'engagement et la ténacité qu'exigent nos métiers. Les mathématiciens peuvent chercher toute leur vie à résoudre un problème sans être certains d'y arriver. Les cinéastes prennent aussi le risque de voir leur projet achopper

à tout moment. Il y a quelque chose de l'ordre d'un acte de foi. Être mathématicien, c'est entrer en religion. D'ailleurs l'ENS ressemble à un cloître et il s'y déroule des séminaires... Dans le film, Marguerite a un rapport très pur aux mathématiques, une forme de dévotion.

À travers Lucas, vous montrez un personnage qui vit les maths de manière très différente.

Lucas est plus sociable que Marguerite, plus léger, il étudie avec pour objectif la réussite et une certaine forme de gloire. C'est la passion des mathématiques qui les réunit. Marguerite, elle, ne s'autorise pas à rêver ailleurs, elle a même le sentiment que l'affirmation de sa féminité pourrait dévaloriser son talent. A l'ENS, elle a tout fait pour se fondre dans la masse, c'est-à-dire être comme les garçons qui doivent masquer leurs faiblesses et leur sensibilité. Lucas doit batailler pour convaincre Marguerite qu'avoir des sentiments ne risque pas de la fragiliser. Pour Marguerite, le problème, c'est que les sentiments sont par essence irrationnels et qu'elle ne peut pas les maîtriser comme un raisonnement scientifique. Il y a dans leur duo matière à une comédie romantique et à une comédie de remariage avec les mathématiques !

L'autre univers, tout aussi inattendu, dans lequel déboule Marguerite est celui des parties de Mah-jong !

Et je ne suis pas plus joueuse de Mah-jong que mathématicienne ! Avec Mathieu, on a beaucoup réfléchi sur ce qui est l'un des pivots du film : comment Marguerite, après son départ de l'ENS, allait-elle renouer avec sa passion ? On s'est rendu compte que les grands joueurs de Mah-jong sont souvent des mathématiciens : c'est un jeu où il faut des capacités intellectuelles hors norme pour s'imposer. C'était idéal pour Marguerite. J'aimais l'idée de la replonger dans un univers exclusivement masculin où les participants estiment d'emblée qu'elle n'a pas sa place, qu'elle ne peut pas égaler les hommes.

Le refus de perdre, au jeu comme dans ses recherches, conduit Marguerite au bord du gouffre. Est-ce une manière d'évoquer la folie qui guette tous les génies ?

J'ai voulu faire ressentir ce vertige, montrer que Marguerite peut déraiser par orgueil et se perdre. Tous les mathématiciens ont une histoire à raconter sur un collègue qui est devenu fou, schizophrène, qui ne s'est jamais remis d'une erreur ou qui s'est suicidé. C'est un domaine qui exige tellement de travail que le cerveau peut implorer. Les gens qui ont une

rapidité d'esprit hors du commun veulent être en permanence à la hauteur de leurs capacités; c'est une exaltation permanente et beaucoup de pression. On peut aussi faire la comparaison avec ce que vivent les sportifs de haut niveau.

Vous arrivez même à rendre les mathématiques cinématographiques !

C'était l'un des enjeux de réalisation. Comment rendre organiques ces mathématiques auxquelles personne ne comprend rien ? Il fallait que j'épouse la passion et l'engagement qui animent Marguerite et Lucas. Tous les deux sont acharnés au travail. Ne pas le montrer aurait été un manque de respect et de vérité envers les mathématiciens. Quand ils peignent en noir les murs du salon pour y écrire des équations, je voulais qu'on ait l'impression qu'ils repeignent la chapelle Sixtine ! Ces écritures sont comme des hiéroglyphes, elles sont fascinantes à regarder, il y a de la beauté dans cette abstraction. Les équations que l'on voit dans le film sont toutes authentiques, c'est Ariane Mézard qui s'y est engagée. La conjecture de Goldbach, que veut prouver Marguerite, est un problème qui n'a pas encore été résolu. Et ce qui est fou, c'est qu'Ariane a cherché quelles pourraient être les étapes d'un chemin vers la preuve, en amont du tournage. Les mathématiciens qui, dans le futur, voudront démontrer Goldbach pourront voir le film et y trouver des éléments-clé !

Propos recueillis par Philippe Paumier, extraits du dossier de presse du film





LE POINT DE VUE DE

ARIANE MÉZARD

Professeure des universités à Sorbonne Université, en détachement au Département de Mathématiques et Applications (DMA) de l'ENS PSL, j'ai été contactée par Anna Novion, réalisatrice et scénariste, en 2017.

Anna cherchait un sujet de thèse pour le personnage principal du scénario qu'elle était en train d'écrire, qui allait devenir *Le Théorème de Marguerite*. Marguerite Hoffman, l'héroïne du film d'Anna Novion, est ainsi devenue ma huitième doctorante, une doctorante imaginaire. Le potentiel de ce personnage était évident. Elle portait la possibilité de montrer la recherche en maths à une échelle inédite au grand public, de proposer une incarnation nouvelle, un modèle féminin. Marguerite allait être une mathématicienne, une héroïne au parcours singulier, une jeune femme libre qui choisit sa vie. Le processus, proposé par Anna Novion, ne m'était pas si étranger. Trouver un sujet de thèse, travailler la bibliographie, trouver un cheminement vers le résultat de thèse, défendre et présenter à tous les publics le théorème obtenu. Les déformations de représentations galoisiennes, mon thème de prédilection, ne convenaient pas à Marguerite, pas raisonnable du point de vue cinématographique, pas « montrable ». Anna m'a alors présenté la pyramide de Goldbach comme le rêve d'enfance

de Marguerite. Nous avons travaillé, trois ou quatre ans, le temps d'un doctorat. Anna revenait vers moi avec des idées de scénario qu'il fallait mettre « en mathématiques » un peu comme « en musique ». J'étais horrifiée quand il a fallu produire une erreur. Il n'y a pas d'erreur en mathématiques. S'il y a une erreur, ce ne sont plus des mathématiques, « c'est vide » dit Laurent Werner, le directeur de thèse de Marguerite. Un travail qui contient une erreur n'a aucune valeur quelque soit le temps qu'on y ait mis. Il n'y a pas d'intention qui compte, juste la fin. En revanche, découvrir une erreur dans son propre travail c'est extrêmement positif, cela signifie qu'on a compris quelque chose qui nous échappait. Trouver une erreur c'est progresser. La corriger et tout redevient mathématiques. Marguerite est un personnage profondément humain, une héroïne singulière, une mathématicienne. Anna Novion a fait des mathématiques un objet cinématographique beau et poétique...



CE QUE

LE THÉORÈME DE MARGUERITE

NOUS DIT DES MATHS

Par Marie Debuissier, professeure de mathématiques

Les spectateurs et spectatrices trouveront dans *Le Théorème de Marguerite* une idée qu'on peine à faire entendre, dans les œuvres de fiction tout comme dans les cours de maths : celle que faire des mathématiques, c'est bien plus que calculer des résultats ou dessiner des figures géométriques.

C'est plutôt créer un monde où tout est lié, et dans lequel chaque nouvelle construction s'appuie uniquement sur les précédentes. Un monde tout à la fois passionnant pour les passionnés et énigmatique pour les profanes ; un monde parfois vertigineux tant certains problèmes sont aussi simples à énoncer qu'ardus à résoudre, comme la conjecture de Golbach qui est au centre du film.

Le Théorème de Marguerite nous montre comment se construisent les maths. Il présente en filigrane ce qu'est une démonstration : la présentation d'une construction, uniquement à partir de la logique et de briques déjà créées par d'autres. Car en mathématiques, pour pouvoir affirmer qu'une phrase est vraie, il faut nécessairement montrer qu'elle découle logiquement de théorèmes déjà existants et

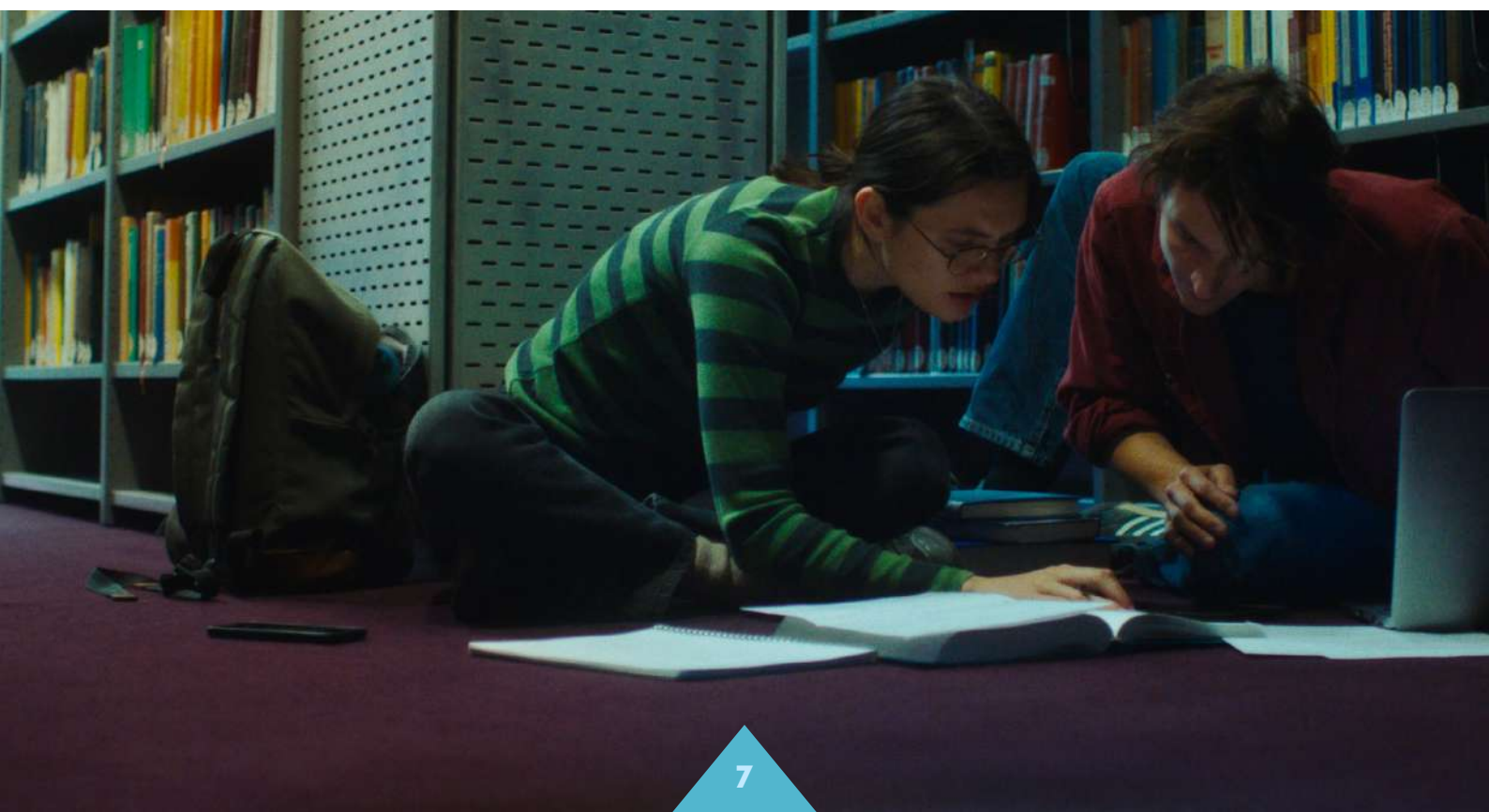
démontrés. On peut ainsi comparer les maths à un jeu de construction en brique dont les règles sont très simples : il y a des briques de base, considérées comme vraies au départ, qui constituent les fondations de l'édifice. On les appelle les postulats et ils sont peu nombreux. On a le droit de les utiliser et de les organiser de façon logique pour prouver que d'autres phrases sont vraies. Chaque nouvelle phrase qu'on a prouvée s'appelle une propriété : c'est une nouvelle brique qui permet à son tour d'en prouver d'autres. Si ce résultat est particulièrement important, qu'il constitue une grande avancée ou qu'il s'avère essentiel pour de nombreuses constructions futures, on l'appelle même « théorème ». Découvrir que des notions connues permettent d'en fabriquer une nouvelle, cela ouvre le champ à de nouvelles notions, de nouveaux domaines d'étude, et

de nouvelles applications aux maths et aux sciences. Parfois, des mathématiciens ont une idée de brique sans pouvoir réellement la fabriquer (une conjecture non démontrée). Parfois, des mathématiciens construisent des briques sans savoir si cela servira un jour à quelqu'un.

À travers l'itinéraire intellectuel de Marguerite, le film d'Anna Novion distille une autre idée capitale : on ne fait pas des maths seul dans son coin, on a besoin de relecteurs, qui valident les démonstrations produites. Cette idée est à la fois le point de départ du film (la théorie de Marguerite qui s'effondre lors de sa présentation) et son épilogue (les personnes présentes dans l'amphithéâtre qui valident les avancées de Marguerite). Mais elle est présente tout du long du film dans la relation entre Marguerite et Lucas : à chaque étape de son travail Marguerite ressent le besoin de faire relire ses travaux à son collègue, sans quoi elle ne pourra avancer. Les maths sont ainsi un langage qui s'écrit pour les autres : elles doivent être lisibles et compréhensibles en tant que texte, avec sa syntaxe et sa grammaire particulière. Il s'agit d'un point essentiel à évoquer en classe, car souvent les élèves ne s'intéressent qu'au résultat et négligent le plus important : l'intelligibilité de la démonstration. L'autre belle idée transmise par le film est la passion qui anime Marguerite, totalement happée par ses recherches. Il est grisant de chercher la preuve d'une conjecture,

de plonger dans l'inconnu sans savoir si on va sortir victorieux d'une telle aventure. Il l'est encore plus de découvrir de nouveaux paysages et des chemins vers une nouvelle notion ou une nouvelle idée. On ressent ce même plaisir quand on accède à quelque chose sur lequel on se questionnait. Ce plaisir, on l'a tous ressenti un jour, en classe : ce moment un peu magique où on se dit « Ahhhhh, oui ! Ça y est, j'ai compris ! » Les yeux s'écarquillent, le sourire est grand et sincère, on se sent bien. Comme lorsqu'on retrouve une amie proche que l'on n'avait pas revue depuis longtemps. Pour Marguerite, les maths sont une amie, et c'est sans doute cela qu'elle recherche avec une telle exaltation : de belles sensations, autant dans le défi de la recherche, le désespoir parfois de ne pas savoir comment avancer, l'excitation de voir une possible réussite, et la joie d'achever quelque chose pour lequel on a fourni de grands efforts.

Le Théorème de Marguerite est ainsi un film qui nous parle de ce que sont *réellement* les maths, comment elles se construisent au fil du temps, et en quoi elles peuvent aider à évoluer intérieurement par les leçons humaines qu'elles nous enseignent : le courage de chercher, la persévérance malgré les erreurs, la transmission de ce qu'on croit être juste, la solidarité et la confiance pour travailler en équipe... Autant de petites choses présentes dans toutes nos salles de classe.



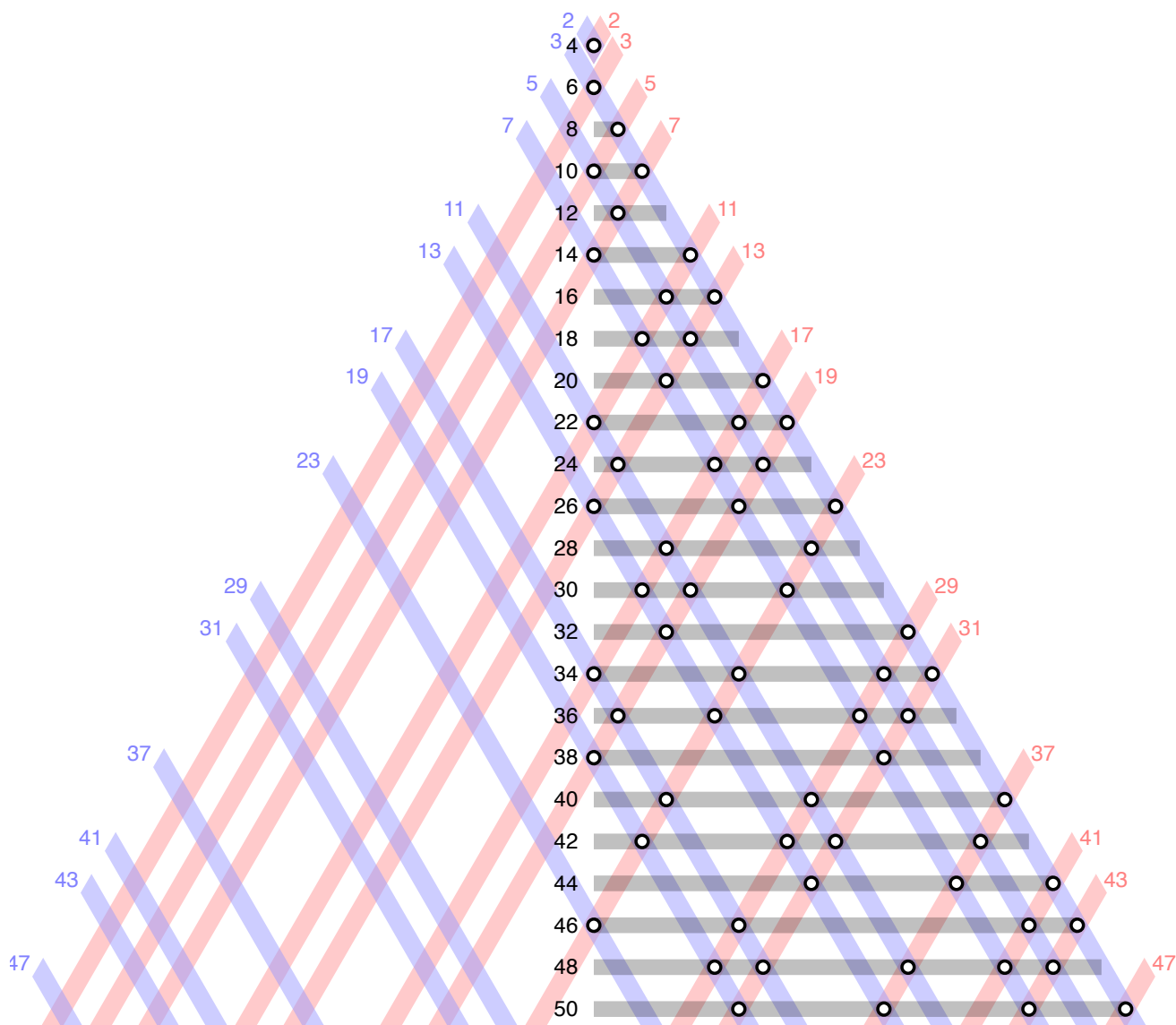


Illustration graphique de la conjecture de Goldbach sur les nombres pairs de 4 à 50. © Adam Cunningham and John Ringland via Creative Commons

LA CONJECTURE DE GOLDBACH

Formulée en 1742 par Christian Goldbach, cette conjecture est un des plus vieux problèmes non résolus des mathématiques. « **Tout nombre pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers** ». Par exemple $6 = 3 + 3$ et $38 = 31 + 7$ ou encore $112 = 31 + 83$. Ces exemples nous montrent que c'est vrai pour 6, 38 et 112, mais comment faire pour le prouver pour *tous* les nombres pairs supérieurs à 3, comme le prétend la phrase ? Marguerite n'a pas l'ambition de démontrer directement la conjecture, sur laquelle les mathématiciens se cassent les dents depuis plus de 250 ans. Mais elle essaye de contribuer à la démonstration, comme l'ont fait de nombreux mathématiciens avant elle. En 1937 Vinogradov montre que l'on peut décomposer un entier pair « suffisamment grand » en somme de 4 nombres premiers au maximum. Malheureusement le « suffisamment grand » implique des nombres qui sont au-delà d'un seuil énorme. Une amélioration de ce théorème a permis de « réduire » ce seuil à un nombre possédant 1346 chiffres (Liu Ming-Chit et Wang Tian-Ze - 2002). Les ordinateurs actuels ne permettent pas encore de vérifier pour tous les nombres inférieurs à ce seuil, et la recherche continue afin de tenter de faire diminuer ce seuil. Le meilleur résultat dont on dispose actuellement est celui de Terence Tao (2012) qui établit que tout entier pair est la somme d'au plus 6 nombres premiers.

QUELQUES CÉLÈBRES

MATHÉMATIENNES

Par David Magnien, professeur de mathématiques

Au début du *Théorème de Marguerite*, son directeur de thèse, Laurent Werner (interprété par Jean-Pierre Darroussin) dit à Marguerite : « C'est important de vous mettre en avant, c'est rare une mathématicienne de votre niveau ! ». Ce n'est sans doute pas rare, mais les mathématiciennes dont l'histoire a retenu le nom le sont sans conteste ! Les femmes ont été tenues à l'écart du domaine scientifique jusqu'à une époque très récente, et aujourd'hui encore les stéréotypes de genre ont la vie dure, dans les classes, et jusque dans le milieu de la recherche. Pourtant, de nombreuses femmes ont joué un rôle tout à fait déterminant dans l'histoire des mathématiques. On retrouve certains de leurs traits chez Marguerite...



Hypatie interprétée par l'actrice Rachel Weisz dans le film *Agora* d'Alejandro Amenabar (2009)
© Mars Distribution

HYPATHIE D'ALEXANDRIE

(v. 370 – 415 ap. JC)

Hypatie d'Alexandrie était la fille du mathématicien et astronome Théon. Tout comme Marguerite, ses capacités exceptionnelles ont trouvé, en sa famille et son environnement, un terreau fertile où croître. Son père, qui fut son premier professeur, enseignait à l'Université d'Alexandrie, ville qui avait une longue tradition de conservatoire du savoir et de creuset intellectuel : la fameuse Grande Bibliothèque d'Alexandrie, le Mouseion ou temple des Muses (qui donna notre mot musée) où les arts que représentaient ces déesses étaient cultivés, le Serapeum ou temple de Sérapis, étaient autant de centres qui avaient attiré des personnalités comme Archimède, Eratosthène ou Euclide. Hypatie a grandi au sein de l'Université qu'elle considère comme sa maison, et où elle finira par enseigner mathématiques et philosophie ; tout comme Marguerite au sein de l'ENS, elle est stimulée par le bouillonnement intellectuel et les rencontres avec les grands savants de son époque.

EMILIE DU CHÂTELET

(1706-1749)

Tout comme Hypatie échappa au destin domestique des femmes grecques grâce à son père, Emilie du Chatelet doit au sien son éducation, qui lui donnera le goût des sciences. Ses rencontres avec les intellectuels de son temps, Voltaire en particulier, l'exposent aux idées de Newton, dont elle est la première traductrice française. Elle partage avec Marguerite une passion pour les mathématiques et la recherche, qu'elle place devant le respect de l'étiquette. On se moque volontiers de son indépendance ; elle déplaît lorsqu'elle exige en plein repas du silence pour réfléchir à un problème ardu, faute de disposer des bouchons d'oreille de Marguerite. Mais tout comme cette dernière, son génie intellectuel finit par lui gagner le respect de nombreux scientifiques du XVIIIe siècle, y compris parmi ses détracteurs.



Emilie du Châtelet peinte par Quentin de la Tour
© Wikipedia Commons



Sophie Germain - DR

SOPHIE GERMAIN

(1776-1831)

Sophie Germain partage avec Marguerite un tempérament très réservé qui la prédispose à l'étude des ouvrages mathématiques que son père collectionne, notamment D'Alembert et Bézout. À l'âge où Marguerite passe le concours de l'ENS, Sophie ne peut prétendre à celui de Polytechnique, réservé aux hommes, et doit se servir d'un prête-nom masculin pour entrer en contact avec le mathématicien Lagrange. Une fois la supercherie éventée, il la prendra sous son aile et lui donnera le goût de la théorie des nombres qu'affectionne tant Marguerite. Tout comme cette dernière, Sophie Germain s'attaquera à une grande énigme mathématique, qu'elle résoudra en partie : le Dernier Théorème de Fermat. Cependant la fin de sa carrière mathématique sera marquée par des tentatives infructueuses de résoudre le problème des plaques vibrantes, une autre énigme mathématique, en commettant la même erreur que Marguerite au milieu du film : s'isoler du milieu de la recherche pour tenter de réussir seule par orgueil.

EMMY NOETHER

(1882-1935)

Une autre mathématicienne géniale et décalée, Emmy Noether débute sa carrière universitaire sans salaire, les femmes étant refusées aux postes de professeur. Entretien et soutenue par sa famille et des collègues masculins admiratifs de son génie, au premier rang desquels les très grands Hilbert et Klein, elle finira par décrocher un poste officiel, mais gardera de cette époque un goût vestimentaire très simple et un dédain des convenances et de tout ce qui peut la détourner de la recherche : on reconnaît là les traits de caractère de Marguerite au début du film ! Tout comme elle, Emmy affiche également un manque d'intérêt pour les jeux de la séduction, préférant se consacrer à ses recherches à plein temps. Elle gagnera enfin une réputation internationale suite à ses travaux, salués par Einstein lui-même.



Emy Noether - Wikipedia Commons



© Maryam Mirzakhani - Stanford University

MARYAM MIRZAKHANI

(1977-2017)

Spécialiste de la dynamique et de la géométrie des surfaces, cette mathématicienne iranienne est la première femme (après 52 hommes) à avoir remporté la Médaille Fields, considérée comme le Nobel des mathématiques. Passionnée de lecture, elle rêvait de devenir écrivaine jusqu'à ce qu'elle tombe sur un livre de maths racontant l'histoire de Friedrich Gauss expliquant comment effectuer facilement la somme de tous les entiers de 1 à 100. Elle est décédée d'un cancer à 40 ans. Elle expliquait que « la majorité du temps, faire des maths est comme grimper une montagne, sans chemin et sans perspective devant », mais que rien ne la rendait plus heureuse que de se consacrer à sa discipline.

Fermat's equation:
 $x^n + y^n = z^n$
This equation has no
solutions in integers
for $n \geq 3$



... ET UN

MATHÉMATICIEN

ANDREW WILES

(né en 1953)

Andrew Wiles est un homme, mais son histoire peu commune a fortement inspiré le scénario du film d'Anna Novion.

Wiles tombe par hasard sur l'énoncé du Dernier Théorème de Fermat à dix ans en lisant une revue mathématique, et se fait la promesse de le résoudre. Ce théorème de la théorie des nombres est d'apparence simple : il énonce qu'il est impossible de trouver trois entiers x , y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ si $n > 2$. Pierre de Fermat, juge toulousain du XVII^e siècle et esprit brillant, avait laissé une note à ce sujet dans la marge d'un livre d'arithmétique qu'il lisait pendant ses audiences. Il était convaincu, écrivait-il, d'avoir trouvé une preuve de cette affirmation, mais qu'elle était trop longue pour tenir dans la marge. Si Fermat avait une preuve, elle était sans aucun doute erronée, car il a fallu attendre les outils du XX^e siècle pour la trouver.

Wiles s'oriente alors vers les mathématiques avec succès, puis vers la théorie des nombres, où ses premiers résultats lui ouvrent les portes des plus prestigieuses universités (Harvard, Princeton, Cambridge). Il reprend son projet secret, mis en sommeil pendant tout ce temps, lorsqu'est prouvé un résultat intermédiaire qui peut mener à la résolution du problème complet : il décide alors de travailler seul et en secret, pendant sept années, au terme desquelles il se confie à son collègue Nicholas Katz pour vérification. Wiles exposera son résultat à l'occasion d'un symposium où il surprend tout le monde, personne ne sachant qu'une résolution de Fermat était à l'étude.

Ce parfait parallèle avec Marguerite ne s'arrête pas là : Wiles a commis une erreur dans sa preuve. Un de ses relecteurs l'a repérée après la diffusion de son article ; c'est donc un échec moins spectaculaire que celui de Marguerite qui voit s'effondrer toutes ces années de travail en public. Contrairement à elle, il n'abandonnera pas et reprendra immédiatement ses recherches et trouvera la partie manquante à l'occasion d'une épiphanie tout à fait inattendue. Il passera alors par les circuits universitaires classiques pour diffuser sa preuve, gagnant une reconnaissance mondiale aussi bien auprès des professionnels que du grand public.

Thème	Niveau	Point du programme / Activité possible
Démonstration	Lycée	« L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, mais en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages. (...) Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Les élèves découvrent quelques démonstrations selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »
	Lycée (activité)	Présentation de conjectures simples : Conjecture de Goldbach, Conjecture de Syracuse. Test sur des valeurs. Rencontre de conjectures qui semblent vraies pour les premiers termes mais s'avèrent finalement fausses (par exemple tous les nombres de Mersenne du type avec p premier sont des nombres premiers : elle est fausse pour $p = 11$). Sensibilisation à la difficulté d'une démonstration.
	Lycée	« - Reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques; - formuler la négation de propositions simples - mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ; - formuler une implication, une équivalence logique, les mobiliser dans un raisonnement simple ; - formuler la réciproque d'une implication ; - lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle. Les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation. Les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde. »
	Lycée (activité)	A partir d'une proposition (par exemple « tout multiple de 10 est un multiple de 5 »), énoncer la négation, la réciproque, démontrer lesquelles sont vraies en utilisant des propriétés, des définitions ou des contre-exemples.

Écriture mathématique	Lycée	Apprentissage des notations mathématiques et de la logique, écriture mathématique. « Les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : \in , \subset , \cap , \cup , ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.
	Tous niveaux (activité)	Activité sur la rédaction logique et mathématique, par exemple à partir d'un texte ou d'une démonstration dans laquelle il manquerait les connecteurs logiques (et, ou, donc, si, alors, ...)
Nombres premiers	Collège (activité)	Notion de nombre premier, crible d'Ératosthène. Activité flash (éventuellement par équipe) de décomposition en produit de premiers à partir des critères de divisibilité et des tables de multiplication.
	Terminale (activité)	Présentation de nombres premiers particuliers (Nombres premiers de Sophie Germain, nombres premiers de Mersenne, nombres premiers jumeaux,...)
Dénombrement	Dès la 3e (activité)	Calcul de probabilités par dénombrement sur des situations de jeu (mah-jong, cartes, démineur...) à partir de cas équiprobables.
	Terminale	« Manipuler quelques notions ensemblistes, notamment celles de produit cartésien, de couple, de liste ou k-uplet, qui interviennent dans toutes les parties du programme ; - dénombrer quelques objets combinatoires de base (listes d'éléments, combinaisons, permutations) pouvant être représentés diversement : parties d'un ensemble, mots, chemins dans un arbre. »
	Terminale	Dénombrement sur des situations de jeu plus complexes avec des coefficients binomiaux (par exemple sur des mains au mahjong : nombre de mains contenant une paire, un Pung, deux Pung...)
Histoire des maths	Tous niveaux	Histoire des maths : Exposés sur des femmes mathématiciennes.
	Tous niveaux	Histoire des maths : Exposés sur l'évolution de l'écriture en mathématiques à travers des textes de différentes époques.
Divers	Terminale	Étudier un même exercice de plusieurs façons différentes (géométrie euclidienne, géométrie analytique, fonctions, aire sous la courbe...) pour mettre en avant qu'il y a parfois la possibilité de « faire un pas de côté » pour voir le problème sous un autre angle, comme proposé dans le film.

Par David Magnien

ACTIVITÉ 1 :

LA CONJECTURE DE GOLDBACH ET LES NOMBRES PREMIERS

Source : <https://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Goldbach-1473.html>

RAPPEL : Une conjecture est une affirmation dont on constate la validité sur un grand nombre d'exemples, sans pouvoir ni prouver ni invalider sa véracité dans le cas général. Le Dernier Théorème de Fermat en était un exemple avant sa preuve en 1995 par Andrew Wiles, qui sert de modèle aux scénaristes pour écrire l'histoire de Marguerite. C'est en 1742 que le mathématicien prussien Christian Golbach écrit une lettre au mathématicien suisse Leonhard Euler où il fait l'hypothèse que : *tout nombre pair supérieur à 4 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.* Commençons par nous familiariser avec les nombres premiers.

PARTIE I : LES NOMBRES PREMIERS

Un nombre entier naturel p est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Cette définition exclut donc 1, qui n'admet qu'un seul diviseur positif (lui-même), et 0 qui en admet une infinité. Le plus petit nombre premier est donc 2 ; c'est le seul nombre premier pair : un nombre pair autre que 2 est divisible par 1, 2 et lui-même, ce qui fait au moins trois diviseurs positifs distincts.

NIVEAU 3^E

On peut faire la liste des nombres premiers grâce au crible d'Eratosthène, algorithme simple énoncé au III^e siècle av. JC. Il s'agit de faire la liste des nombres entiers jusqu'à une certaine limite, par exemple 100, et d'éliminer tous les entiers qui sont multiples d'un autre entier supérieur ou égal à 2. Les entiers restants seront donc premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- 1) On peut barrer 1 qui n'est pas premier. On sait que 2 est premier, on va donc l'entourer ; on peut alors barrer tous ses multiples. Quel est le nombre non barré qui suit immédiatement 2 ?
- 2) Ce nombre n'a pas été barré, il est donc premier car il n'a pas d'autre diviseur que 1 ou lui-même (sinon on l'aurait barré). Barrons tous ses multiples. Quel est alors le nombre non barré qui le suit immédiatement ?
- 3) En poursuivant ainsi, constater que les nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

NIVEAU SECONDE

On peut prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers en utilisant le théorème suivant, vu en troisième :

Tout nombre entier non premier se décompose en produit d'au moins deux nombres premiers

Par exemple : $6 = 2 \times 3$; $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$; $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

On va utiliser un raisonnement par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers et arrivons à une contradiction.

Notons p_1, p_2, \dots, p_n les n nombres premiers qui existent d'après notre hypothèse, rangés dans l'ordre croissant : le plus grand d'entre eux est donc p_n . Soit $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$.

- 1) N est-il divisible par p_1 ? par p_2 ? par un des nombres premiers p_i ? Pourquoi ?
- 2) En déduire à l'aide du théorème que N est un nombre premier.
- 3) Prouver que $N > p_n$. En déduire qu'il y a une contradiction dans notre raisonnement.

PARTIE II : LA CONJECTURE DE GOLDBACH-EULER

NIVEAU SECONDE

C'est en effet le nom officiel de notre conjecture, puisqu'Euler y est associé.

En effet, Goldbach avait d'abord énoncé que tout nombre pair était la somme de trois nombres premiers, et Euler a rectifié l'énoncé. Voici pourquoi :

- 1) Supposons qu'un nombre pair N soit la somme de trois nombres premiers.
 - a. Tout nombre premier est impair sauf 2. Prouver que la somme de trois nombres impairs est impaire.
 - b. En déduire que N est nécessairement la somme de deux nombres premiers impairs et de 2.
 - c. Conclure que $N - 2$ est somme de deux nombres premiers impairs, et qu'on retrouve ainsi la formulation de la conjecture énoncée en introduction.

Observons que 2 n'est pas la somme de deux nombres premiers (même si Goldbach considérait 1 comme premier à son époque, rendant alors la chose possible), et que $4 = 2 + 2$.

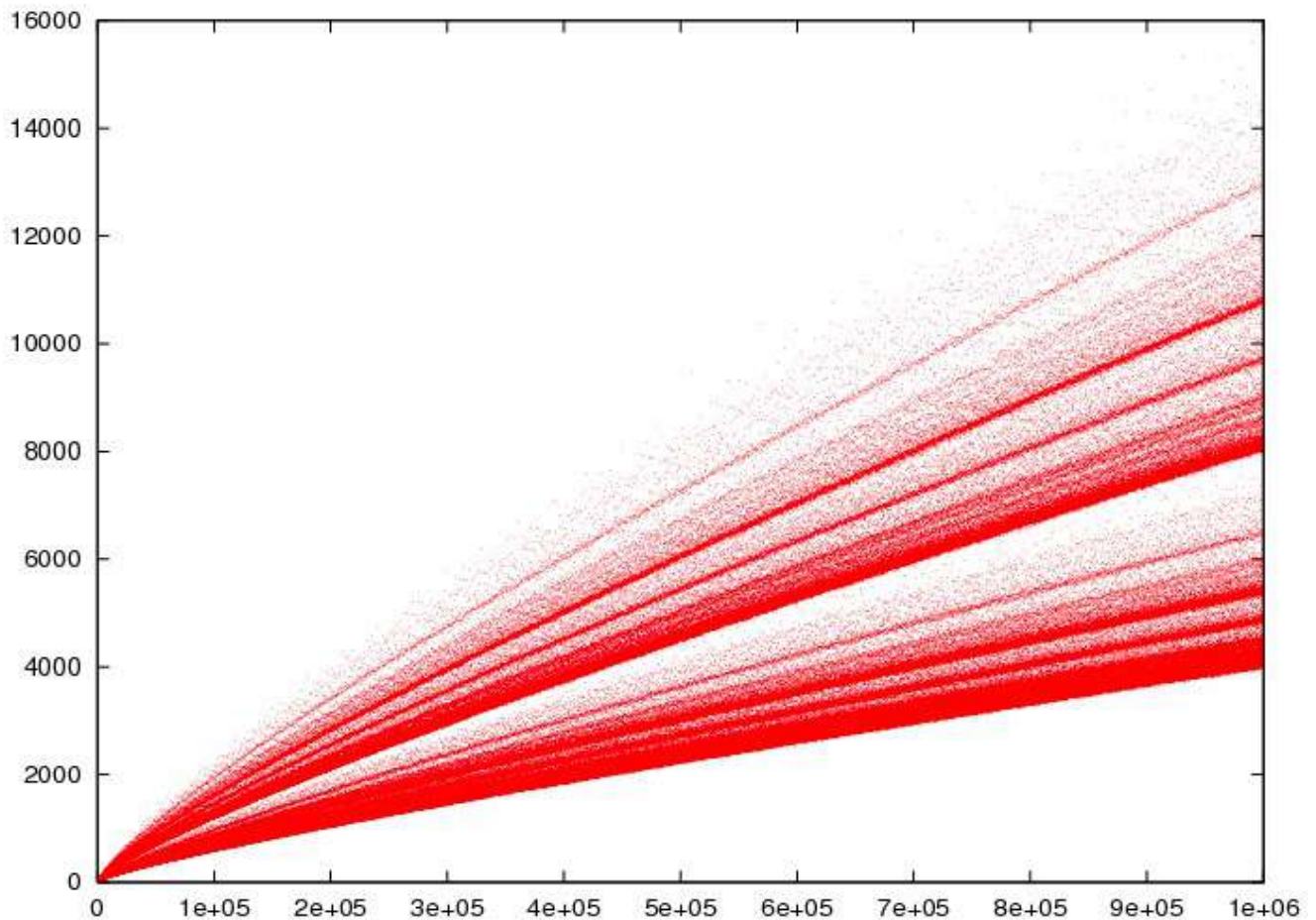
On peut dans un premier temps essayer de constater que cette conjecture est vraie jusqu'à une certaine valeur. Essayons d'obtenir tous les nombres pairs inférieurs à 40 en ajoutant deux nombres premiers.

+	3	5	7	11	13	17	19		
3									
5									
7									
11									
13									
17									
19									

- 1) Puisqu'on veut aller jusqu'à $38 = 19 + 19$, utilisons les nombres premiers jusqu'à 19. Compléter le tableau ci-dessous :
- 2) Obtient-on tous les nombres pairs inférieurs à 40 ? Si non, utiliser les lignes et colonnes supplémentaires pour rajouter des nombres premiers et essayer d'obtenir tous les pairs voulus.

On constate que chaque nombre pair peut apparaître plus d'une fois. Le nombre de cases de notre tableau étant limité, ces « doublons » prennent la place de nombres pairs qui n'apparaîtront peut-être pas si on n'étend pas notre tableau. Il faut donc s'intéresser à la fois à la taille du tableau, qui doit être assez grande pour faire apparaître tous les pairs voulus, et à la multiplicité d'apparition (on parle de *représentations*) des nombres pairs dans le tableau, qui ne doit pas être trop importante.

Le graphique suivant est appelé la *comète de Goldbach* : il donne le nombre de représentations d'un entier. Par exemple, le nombre 1 000 000 a près de 4 000 représentations.



ACTIVITÉ 2 : POKER, MAH-JONG ET COMBINATOIRE

NIVEAU TERMINALE

Quand Marguerite s'intéresse à la partie de Mahjong que mènent Monsieur Kong et ses amis, Noa lui explique que c'est une sorte de poker chinois. Ce à quoi Monsieur Kong rétorque que c'est à la fois plus simple et plus compliqué, car il y a moins de hasard. Nous allons discuter cette affirmation à l'aide d'un peu de combinatoire.

PARTIE I : LE POKER

Il y a de nombreuses variantes des règles du poker en usage actuellement. La plus courante est le Texas Hold'em, mais nous nous concentrerons sur la variante classique (Poker fermé), plus proche du Mah-Jong, où chaque joueur tire 5 cartes qu'il garde cachées.

Étudions certaines des combinaisons de cartes (les *mains*) et leur fréquence. On les tire dans un paquet de 52 cartes, composé de cartes ayant 13 valeurs (de 2 à As) et 4 couleurs différentes.

Quinte Flush Royale	Il s'agit du 10, du Valet, de la Dame, du Roi et de l'As de la même couleur.	10 ♥ - J ♥ - Q ♥ - K ♥ - A ♥
Quinte flush	Ce sont 5 cartes qui se suivent et qui ont la même couleur, dont la carte la plus haute est au maximum un le Roi (on l'appelle alors Quinte flush au Roi).	9 ♦ - T ♦ - J ♦ - Q ♦ - K ♦
Carré	4 cartes identiques et la carte la plus haute disponible. Par exemple on peut trouver un carré d'as kicker dix (4 As accompagnés d'un 10).	A ♥ - A ♦ - A ♣ - A ♠ - T ♦
Full	3 cartes de même valeur et 2 autres cartes de même valeur (un brelan + une paire).	3 ♣ - 3 ♦ - 3 ♥ - 2 ♣ - 2 ♦
Couleur	Ce sont 5 cartes qui ont la même couleur. Si la carte la plus haute est le Valet, on l'appelle couleur au Valet. Ces cartes ne sont pas consécutives.	2 ♣ - 3 ♣ - 9 ♣ - T ♣ - J ♣
Quinte ou suite	Ce sont 5 cartes qui se suivent, mais qui n'ont pas la même couleur.	5 ♥ - 6 ♦ - 7 ♣ - 8 ♣ - 9 ♣
Brelan	3 cartes de valeur identiques et 2 autres cartes différentes.	J ♣ - J ♥ - J ♣ - 8 ♣ - 6 ♣
Double paire	Ce sont deux fois une paire et la carte la plus haute disponible. Les doubles paires sont annoncées dans l'ordre décroissant.	A ♥ - A ♦ - 5 ♣ - 5 ♣ - 8 ♥
Paire	2 cartes de valeur identiques et 3 cartes quelconques, les plus hautes possibles.	2 ♣ - 2 ♦ - K ♥ - T ♣ - 9 ♦

1) Etude du nombre de mains possibles :

- Pour choisir 5 cartes parmi 52, l'ordre est-il important ?
- En déduire qu'il existe 2 598 360 mains de 5 cartes possibles dans un jeu de 52 cartes.

2) La Quinte Flush Royale :

- Combien en existe-t-il de différentes ?
- En déduire la probabilité d'obtenir cette main.

3) La Quinte Flush :

- Combien de possibilités existe-t-il pour choisir la couleur de la quinte flush ?
- Une fois la couleur choisie, combien y a-t-il de possibilités pour la carte la plus basse ?
- Une fois cette carte la plus basse choisie, quelle liberté a-t-on dans le choix des cartes suivantes ?
- En déduire qu'il existe 32 quintes flush différentes possibles, ainsi que la probabilité de tirer cette main.
- Notons qu'on peut autoriser la suite As - 2 - 3 - 4 - 5 (suite blanche, qui commence par un As) : reprendre alors la question précédente.

4) La Suite :

- Combien existe-t-il de valeurs possibles pour la carte la plus basse de la suite ? On autorise la suite blanche pour simplifier.
- Une fois la valeur de la carte basse fixée, chacune des 5 cartes de la suite peut prendre n'importe laquelle des 4 couleurs. En déduire qu'a priori il y a 10 240 mains possibles.
- On veut ne compter que les suites et pas les quintes flush : constater qu'il y a alors 10 200 mains possibles.

5) La Paire :

- Combien existe-t-il de possibilités pour le choix de la valeur commune des 2 cartes de la paire ?
- Une fois cette valeur fixée, il faut choisir 2 cartes parmi les 4 possibles ayant cette valeur. Combien de choix y a-t-il ?
- Les trois cartes restantes doivent avoir des valeurs différentes de celle des cartes de la paire, c'est-à-dire qu'il faut choisir 3 valeurs parmi les 12 restantes. Combien de possibilités cela fait-il ?
- On a donc fixé les valeurs des trois cartes restantes, chacune pouvant indifféremment prendre une des 4 couleurs : il y a donc 4 puissance 3 = 64 possibilités différentes. En multipliant les réponses aux trois questions précédentes entre elles puis par 64, constater qu'il y a 1 098 240 mains possibles contenant une seule paire.

6) La Double Paire :

- Il faut choisir deux valeurs, une pour chaque paire, parmi les 13 possibles : combien y a-t-il de possibilités ?
- Une fois ces deux valeurs fixées, on veut choisir 2 cartes parmi les 4 ayant la première valeur : combien de choix y a-t-il ? Le calcul est le même pour la 2^e valeur.
- Enfin, il faut donner à la dernière carte une valeur différente de celles des deux paires : combien de choix cela laisse-t-il ?
- La dernière carte peut prendre n'importe laquelle des 4 couleurs ; en déduire qu'il y a 123 552 mains possibles contenant deux paires.

7) Le Brelan :

- Combien existe-t-il de possibilités pour le choix de la valeur commune des 3 cartes du brelan ?
- Une fois cette valeur fixée, il faut choisir 3 cartes parmi les 4 possibles ayant cette valeur. Combien de choix y a-t-il ?
- Les deux cartes restantes doivent avoir des valeurs différentes de celle des cartes du brelan, c'est-à-dire qu'il faut choisir 2 valeurs parmi les 12 restantes. Combien de possibilités cela fait-il ?
- On a donc fixé les valeurs des deux cartes restantes, chacune pouvant indifféremment prendre une des 4 couleurs : il y a donc 4² = 16 possibilités différentes. En multipliant les réponses aux trois questions précédentes entre elles puis par 16, constater qu'il y a 54 912 mains possibles contenant un brelan simple.

PARTIE II : LE MAH-JONG :

Le Mah-Jong se joue à quatre, avec un jeu de tuiles. Les tuiles ont des *valeurs* de 1 à 9, et ont trois *couleurs* qui sont bambous, cercles et nombres. Chacune de ces tuiles existe en 4 exemplaires : il y a donc 27 faces possibles (une couleur et une valeur données) pour une tuile, chaque face apparaissant 4 fois. Il existe d'autres tuiles mais qui ne comptent pas pour faire des combinaisons, aussi allons-nous les négliger. Il y a au total 144 tuiles.

Le but du jeu est de faire Mah-Jong, c'est à dire arriver à utiliser ses quatorze tuiles pour former quatre combinaisons et une paire. La paire est composée de deux tuiles identiques. Les autres combinaisons sont :

- le Chow, une suite de trois tuiles de la même famille.
- le Pung (brelan), représenté par trois tuiles identiques.
- le Kong (carré), représenté par quatre tuiles identiques.

A noter que le Kong ne compte que pour 3 tuiles (alors qu'il en utilise 4), c'est pourquoi on peut faire Mah-Jong avec plus de quatorze tuiles.

Exemple de Mah-Jong avec une paire, un Chow, deux Pung et un Kong :



Les combinaisons étant donc bien plus nombreuses, nous n'allons pas les détailler toutes ! Nous allons essayer de calculer la probabilité d'une combinaison semblable à celle ci-dessus, c'est-à-dire composée une paire, un Chow, deux Pung et un Kong.

- 1) On va donc choisir 15 tuiles parmi 144 : pouvez-vous donner un ordre de grandeur du nombre de possibilités ?
- 2) On doit choisir une face pour la paire, deux autres pour les Pung, une pour le Kong, et une dernière pour la tuile la plus basse du Chow (les suivantes étant fixées par ce dernier choix), soit 5 faces parmi les 27 faces possibles. Combien y a-t-il de possibilités ?
- 3) On commence par la paire. On a choisi sa face. Combien y a-t-il de tuiles correspondantes possibles ? On va en choisir 2 parmi elles.
- 4) On s'intéresse à présent aux Pung (brelans). On a choisi leurs faces. On va prendre 3 tuiles parmi les 4 disponibles, pour chaque brelan. En déduire qu'il y a alors 16 possibilités de choisir ces deux brelans.
- 5) Passons au Chow et au Kung. Les tuiles du Kung sont choisies et il n'y a plus de choix à faire, car on n'a qu'une seule façon de prendre les quatre tuiles de la face choisie. On admettra pour simplifier que les Pung et la paire n'empêchent pas de choisir les tuiles suivantes du Chow (ce qui est une GROSSE approximation !). On a choisi la face de la tuile la plus basse du Chow, qui est ainsi totalement déterminé ; combien y a-t-il de choix pour chacune des faces choisies ?
- 6) Prouver qu'il existe dans ces conditions 496 005 120 combinaisons possibles respectant les conditions demandées.
- 7) Quel est votre avis sur l'affirmation de Monsieur Kong, selon laquelle il y a moins de hasard dans le Mah-Jong que le poker ?

Pour l'organisation de séances scolaires avec vos classes dans la salle de votre choix, merci de contacter directement votre salle de cinéma de proximité.

Si vous rencontrez des difficultés ou avez des questions, n'hésitez pas à nous contacter : contact@zerodeconduite.net

Crédits du dossier

Dossier conçu par Marie Debuisser, David Magnien et Vital Philippot pour Zerodeconduite.net
en partenariat avec Pyramide Distribution

Photos du film : © TS PRODUCTIONS - Photographe : Michaël CROTTO