ACADÉMIE
D'ORLÉANS-TOURS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales
de mathématiques 2024

Énoncés académiques

Durée : 2h00

à la suite de l'épreuve nationale et de 10 minutes de pause

L'usage des calculatrices est autorisé.

Ce sujet comporte trois exercices et huit pages.

La page 4/8 est une annexe à rendre avec la copie du groupe.

*Les candidats traitent **deux exercices** par groupes de deux ou de trois **:***

- *Les candidats **suivant** l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros **1** et **2**.*
- *Les candidats **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros **1** et **3**.*

Tous les élèves d'un même groupe doivent noter leur numéro d'anonymat sur la copie commune.

Après l'épreuve, vous retrouverez les sujets et documents pour aller plus loin sur la page du site académique consacrée aux olympiades de mathématiques :

https://pedagogie.ac-orleans-tours.fr/maths/au_tour_des_maths/olympiades_de_mathematiques/

Sorcière d'Agnesi

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.
Soit d un nombre réel strictement supérieur à zéro. On considère le point S de coordonnées $(0; d)$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OS]$ et (t) la tangente en S au cercle $\mathcal{C}$.

Partie A : Définition géométrique

Dans cette partie, on choisit $d = 2$.

1. Construire, dans le repère fourni en annexe, le cercle $\mathcal{C}$ et la tangente (t).
   Placer un point A_1 sur le cercle distinct de O et de S.
   La droite (OA_1) coupe la tangente (t) en un point noté B_1.
   Placer le point P_1 ayant la même abscisse que B_1 et la même ordonnée que A_1.
2. Sur la même figure, choisir un second point A_2 sur le cercle distinct de O et de S.
   La droite (OA_2) coupe la tangente (t) en un point noté B_2.
   Placer le point P_2 ayant la même abscisse que B_2 et la même ordonnée que A_2

> La courbe d'Agnesi est l'ensemble des points P obtenus par la construction précédente lorsque le point A parcourt le cercle.

3. Tracer, sur votre copie et à main levée, l'allure de la courbe d'Agnesi.

Partie B : Équation de la courbe d'Agnesi

Dans cette partie, on considère un point A sur le cercle $\mathcal{C}$ distinct de O et S. On admet alors que la droite (OA) est sécante avec la droite (t) et l'on note B leur point d'intersection.
On définit alors le point P comme l'unique point ayant la même abscisse que B et la même ordonnée que A.
Notations : $(x; y)$ et $(x_A; y_A)$ désignent les coordonnées respectives des points P et A.
On supposera que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

1. Démontrer que $xy = x_A d$.
2. On note Ω le centre du cercle $\mathcal{C}$.
   En remarquant que A appartient au cercle $\mathcal{C}$ équivaut à $\Omega A^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$, démontrer que :
   $$x_A^2 = dy - y^2.$$
3. Déduire des deux questions précédentes que :
   $$y = \frac{d^3}{x^2 + d^2}.$$
4. Si A est confondu avec le point S, vérifier alors que les coordonnées du point P vérifient l'équation précédente.

Partie C : Étude de la courbe d'Agnesi.

Soit d un réel strictement positif fixé.
Dans cette partie, nous étudierons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{d^3}{d^2 + x^2}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle paire ? Impaire ?
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]-\infty; +\infty[$.
3. Dans cette question, on choisit $d = 2$.
   Compléter le tableau de valeurs donné en annexe en arrondissant les valeurs au centième près.
   Tracer la courbe de la fonction f dans le repère fourni.

Partie D : Quelques équations

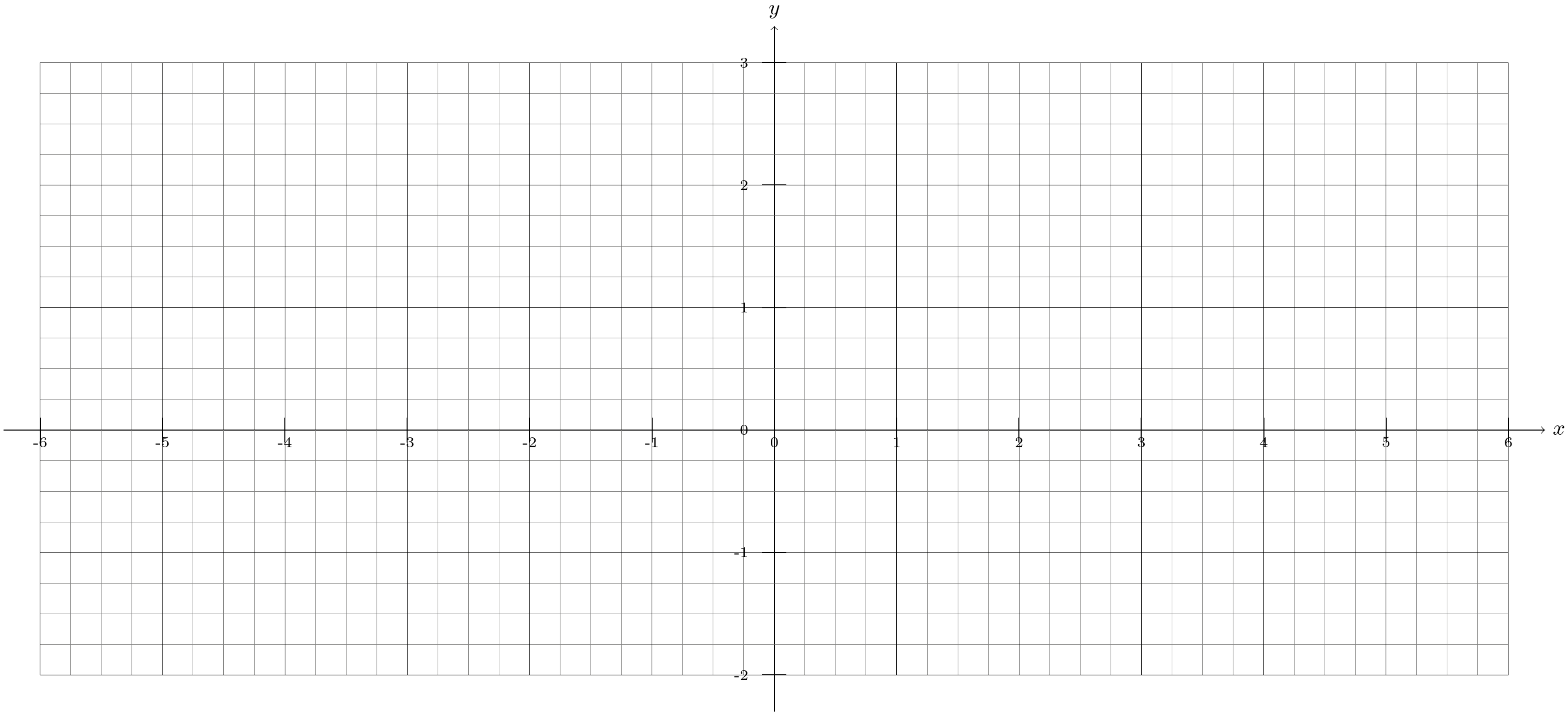
1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \frac{d}{2}$.
2. Notons P le point de la courbe dont l'abscisse est la solution positive de l'équation précédente.
   Ce point peut être obtenu à partir d'un point A situé sur le cercle $\mathcal{C}$ grâce à la construction décrite au début de l'exercice.
   Déterminer l'angle $\widehat{AOS}$.
3. De la même manière, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
   $$f(x) = 3\frac{d}{4}$$
   puis déterminer l'angle $\widehat{AOS}$ où le point A est défini comme à la question précédente.
4. Avec un logiciel de calcul formel, on réalise la feuille de calculs suivante :

`Entrée 1:`	`DeriverFonction(d^3/(x^2+d^2), x)`
`Sortie 1:`	`-2*x*d^3/(x^2+d^2)^2`
`Entrée 2:`	`DeriverFonction(-2*x*d^3/(x^2+d^2)^2, x)`
`Sortie 2:`	`(-2*d^5+6*d^3*x^2)/(x^2+d^2)^3`

   En déduire que la tangente à la courbe d'Agnesi qui a le plus petit coefficient directeur est obtenue lorsque l'angle $\widehat{AOS}$ mesure 30°.

Annexe de l'exercice académique N°1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											



Exercice académique n°2
à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **ayant suivi** la spécialité de mathématiques de la voie générale

À la recherche de partition(s) réalisant le minimum des moyennes de moyennes d'un ensemble d'entiers

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel non nul et par $E_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.

Une **partition** de E_n est un ensemble de parties disjointes d'éléments de E_n dont l'union est égale à E_n. Par exemple, $\{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}$ est une partition de E_4 en trois parties ou sous-ensembles.

La **moyenne des moyennes** de cette partition est le nombre

$$\frac{1 + 4 + \frac{2+3}{2}}{3} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5.$$

Partie A

On considère dans cette partie le cas n=3 et donc l'ensemble $E_3 = \{1, 2, 3\}$.

1. Donner sans justification la liste les cinq partitions de cet ensemble.
2. Calculer pour chacune des partitions précédente la moyenne des moyennes.
3. Préciser la partition pour laquelle la moyenne des moyennes est minimale.

Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n, on désigne par P_k la partition de E_n suivante en k sous-ensembles :

$$P_k = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{k-1\}, \{k, k+1, \dots, n\}\}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, la partition qui permet d'obtenir la plus petite moyenne des moyennes est de la forme P_k et la suite du problème s'intéresse à trouver les valeurs de k permettant de réaliser ce minimum selon les valeurs de n.

Partie B : Étude pour le cas particulier de $n = 4$

Exemple : Pour $n = 4$, $E_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ et la partition P_3 de E_4 est $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$.
La moyenne des moyennes de P_3 vaut $\frac{1+2+\frac{3+4}{2}}{3} = \frac{6{,}5}{3} = \frac{13}{6}$.

1. Expliciter chacune des partitions P_k de E_4 pour k entier naturel compris entre 1 et 4.
2. Calculer la moyenne des moyennes pour chacune des partitions explicitées à la question précédente.
3. Donner la valeur minimale de la moyenne des moyennes des P_k lorsque k décrit l'ensemble des entiers compris entre 1 et 4.

Partie C : Étude pour le cas particulier de $n = 5$

On considère $E_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et on reprend les notations de la partie précédente.

Déterminer la valeur minimale de la moyenne des moyennes des partitions P_k lorsque k décrit l'ensemble des entiers compris entre 1 et 5 et préciser la (ou les) partition(s) pour laquelle (ou lesquelles) cette valeur minimale est réalisée.

Partie D : Étude du cas général

Soit n un nombre entier naturel quelconque et soit k est un entier compris entre 1 et n.

1. Démontrer que l'expression en fonction de n et k de la moyenne des moyennes de P_k est :
$$\frac{1}{2}\left(k + \frac{n}{k}\right).$$

2. On considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,n]$ par :
$$f_n(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right).$$
   i) Démontrer que la fonction f_n admet un minimum sur $]0\,;\,n]$ atteint en $\sqrt{n}$.
   ii) Calculer la valeur du minimum de f_n sur $]0\,;\,n]$.

3. Dans le cas où $n = 9, n = 10, n = 11, n = 12$ et $n = 13$, déterminer la (ou les) partition(s) avec la plus petite moyenne des moyennes.

4. On se place dans le cas général où n est un nombre entier naturel non nul.
   Déterminer, en fonction de n, l'expression de k pour laquelle la moyenne des moyennes de P_k est minimale lorsque k décrit l'ensemble des entiers compris entre 1 et n selon que :
   i) L'entier naturel non nul n est un carré parfait
   ii) L'entier naturel non nul n n'est pas un carré parfait.
   On pourra alors introduire l'entier naturel non nul m tel que $m < \sqrt{n} < m + 1$ *et comparer les valeurs de* $f_n(m)$ *et* $f_n(m+1)$ *selon que n soit plus grand ou plus petit que* $m(m + 1)$.

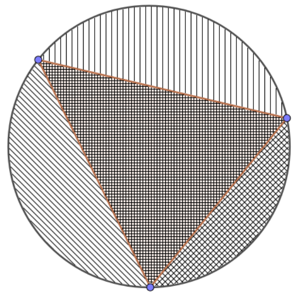
5. Quelles sont les partitions qui rendent minimale la moyenne des moyennes lorsque $n = 2024$?

6. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles il y a exactement deux partitions distinctes qui rendent minimale la moyenne des moyennes de leurs sous-ensembles ?

Exercice académique n°3
à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **n'ayant pas** suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale

Régions du disque

Tout au long de cet exercice, nous allons nous poser la question suivante :

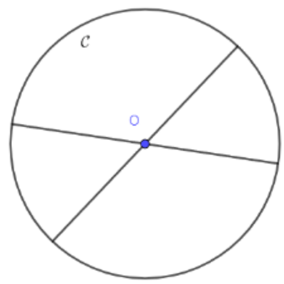


Combien de régions peut-on former au maximum dans un disque avec n points reliés par des cordes ?

Dans l'exemple ci-contre, avec trois points on peut tracer trois cordes qui délimitent quatre régions du disque.

Dans tout cet exercice, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O de rayon quelconque, n et k désignent des entiers naturels non nuls.

Partie A : Échauffement avec des diamètres



1. Combien de régions distinctes peut-on former avec 1 diamètre ?
2. Combien de régions distinctes peut-on former avec 2 diamètres distincts ? Puis avec 3 diamètres ? 4 diamètres ? 9 diamètres ?
3. Pour tout nombre entier k, on note $z(k)$ le nombre de régions que l'on peut obtenir avec k diamètres.
   Justifier que la suite z est une suite arithmétique et préciser sa raison.
4. En déduire l'expression de $z(k)$ en fonction de k.

Partie B : Avec des cordes

Soit n un entier naturel non nul.
On considère n points distincts situés sur le cercle $\mathcal{C}$.

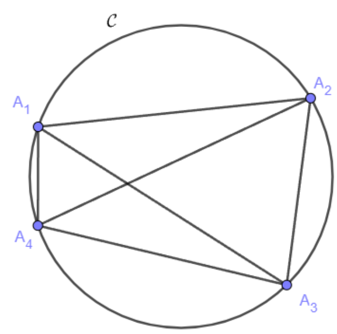


Figure 1

1. Au maximum, combien de régions distinctes peuvent être formées avec les cordes reliant les n points sur le cercle lorsque :
   a. $n = 2$;
   b. $n = 3$;
   c. $n = 4$;
   d. $n = 5$.
2. On note $Z(n)$ le nombre maximal de régions distinctes qui peuvent être formées avec les cordes reliant deux à deux les n points sur le cercle.
   Quelle expression de $Z(n)$ en fonction de n peut-on conjecturer ?
3. Déterminer $Z(6)$.
   Que peut-on en déduire concernant la conjecture précédente ?
4. Pour un entier n donné, à quelle condition sur les cordes le nombre de régions est-il maximal ?

Partie C : Graphe

En mathématiques, un graphe est un ensemble de sommets (ou points) et d'arêtes (ou segments) liant certains couples de sommets. Si l'on ne tient pas compte du cercle et que l'on ajoute les points d'intersections des cordes, on obtient un graphe.
Par exemple, sur la figure 2 ci-contre, on obtient un graphe constitué de 5 sommets et de 8 arêtes.

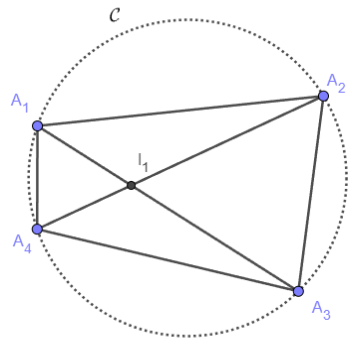


Figure 2

1. En reprenant les figures réalisées dans la partie B, déterminer le nombre de sommets et d'arêtes dans les graphes correspondant à $n = 3$, $n = 5$ et $n = 6$.

La formule d'Euler[1] est une relation entre le nombre de sommets (noté S), le nombre d'arêtes (noté A) et le nombre de faces (noté F) d'un graphe tel que considéré dans ce problème. Une face d'un tel graphe est simplement une zone du plan délimitée par des arêtes. Lorsqu'on compte le nombre de faces de ce type de graphe, il ne faut pas oublier la face extérieure (celle qui est infinie). La formule d'Euler est la suivante :

$$S - A + F = 2$$

Sur la figure 2, les points sur le cercle, les points d'intersection des cordes et les segments reliant ces points constituent un graphe constitué de 5 sommets et 8 arêtes

2. En utilisant la formule d'Euler, déterminer le nombre de faces du graphe de la figure 2.
3. Imaginons que l'on retrace le cercle comme dans la partie B.
   Pour $n = 3$, $n = 5$ et $n = 6$, déterminer le nombre maximal de régions à l'intérieur du disque.

Partie D : Vers la formule

On considère n points distincts situés sur le cercle $\mathcal{C}$.

1. Déterminer le nombre de cordes pour $n = 3$, $n = 4$, puis $n = 5$.
2. Exprimer ce nombre de cordes en fonction de n.

On admet pour la suite que le nombre de points d'intersections entre les cordes (à l'intérieur du disque) est :

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

et que le nombre d'arêtes du graphe correspondant est :

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

3. Établir une formule donnant le nombre de faces du graphe correspondant (en retirant le cercle).
4. En déduire une expression du nombre de régions à l'intérieur du cercle en fonction de n.
5. Quel est le nombre maximal de régions à l'intérieur du cercle pour 2024 points.

[1] Mathématicien suisse (Bâle 1707-Saint-Pétersbourg 1783)